



Probabilidades e Estatística

Soluções de alguns exercícios

2004/05

LEIC + LERCI + LEE

Noções básicas de probabilidades

Exercício 4: Considere-se a seguinte notação (para designar os acontecimentos relevantes ao problema):

$S = \{\text{programa seleccionado possui erro(s) de sintaxe}\}$

$I = \{\text{programa seleccionado possui erro(s) de input/output}\}$

$O = \{\text{programa seleccionado possui erro(s) de outro tipo}\}$

Do enunciado do exercício resulta que: $P(S) = 0.20$, $P(I) = 0.10$, $P(O) = 0.05$, $P(S \cap I) = 0.06$, $P(S \cap O) = P(I \cap O) = 0.03$ e $P(S \cap I \cap O) = 0.02$.

(a) Nesta alínea pretende-se determinar $P(S \cap \bar{I} \cap \bar{O})$, donde

$$P(S \cap \bar{I} \cap \bar{O}) = P(S) - P(S \cap I) - P(S \cap O) + P(S \cap I \cap O) = 0.13.$$

(sugestão: faça um diagrama de Venn)

(b) Dado que a probabilidade pedida é $P(S \cup I \cup O)$, então

$$\begin{aligned} P(S \cup I \cup O) &= P(S) + P(I) + P(O) - P(S \cap I) - P(S \cap O) - P(I \cap O) + P(S \cap I \cap O) \\ &= 0.20 + 0.10 + 0.05 - 0.06 - 0.03 - 0.03 + 0.02 = 0.25. \end{aligned}$$

(fórmula da adição para 3 acontecimentos)

Exercício 11: trata-se de um exercício em que dadas as condições (em particular porque todos os indivíduos, de entre os candidatos a ouvir o boato, são escolhidos com igual probabilidade), as probabilidades pedidas resultam da interpretação de Laplace de probabilidade. Assim em cada alínea a probabilidade pedida é o quociente do número diferente de situações em que o acontecimento em causa pode ocorrer pelo número total de situações associadas à experiência aleatória. Note-se que o espaço amostral, Ω , é constituído por todas as formas de contar um boato a uma de n pessoas r vezes, pelo que $\#\Omega = n^r$.

(a) Seja A o seguinte acontecimento:

$A = \{\text{o boato é contado } r \text{ vezes sem que volte a ser contado à pessoa que lhe deu início}\}$

Então dado que $\#A = n(n-1)^{r-1}$, vem que

$$P(A) = \frac{n(n-1)^r}{n^r} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}.$$

(b) Nesta situação

$A = \{\text{o boato é contado } r \text{ vezes sem que volte a ser contado às pessoa que o já ouviram}\}$

pelo que $\#A = (n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$, donde

$$P(A) = \frac{n!}{n^r(n-r)!}.$$

Exercício 12: Considera-se que se regista o estado de cada um dos dois transístores amostrados pela ordem com que estes são retirados.

(a) O espaço de resultados é $= \{(D, D), (F, D), (D, F), (F, F)\}$, onde D (F) significa defeituoso (não defeituoso ou funcional) e: $P(\{(D, D)\}) = 0.04$, $P(\{(F, D)\}) = P(\{(D, F)\}) = 0.16$ e $P(\{(F, F)\}) = 0.64$.

(b) $P(A_1) = P(A_2) = 0.2$, $P(A_3) = 0.36$ e $P(A_4) = 0.32$.

(c) Considerando que não há reposição, o espaço de resultados mantém-se, mas:

$$P(\{(D, D)\}) = \frac{2}{90}, \quad P(\{(F, D)\}) = P(\{(D, F)\}) = \frac{16}{90} \quad \text{e} \quad P(\{(F, F)\}) = \frac{56}{90};$$

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.2, \quad P(A_3) = \frac{17}{45} \quad \text{e} \quad P(A_4) = \frac{16}{45}.$$

Exercício 20: Suponha-se que o teste é aplicado a um indivíduo escolhido ao acaso da população. Dados: $P(C) = 0.005$, $P(T|C) = 0.99$, $P(\bar{T}|\bar{C}) = 0.95$, onde $C = \{\text{o indivíduo testado tem cancro}\}$ e $T = \{\text{o resultado do teste aplicado ao indivíduo é positivo}\}$.

(a) Nesta alínea pretende-se determinar $P(C|T)$. Note-se que decorre do teorema de Bayes que

$$\begin{aligned} P(C|T) &= \frac{P(T|C)P(C)}{P(T)} \\ &= \frac{P(T|C)P(C)}{P(T|C)P(C) + P(T|\bar{C})P(\bar{C})} \\ &= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + (1 - 0.95) \times (1 - 0.005)} \\ &= 0.0905. \end{aligned}$$

- (b) Seja $D = \{\text{os resultados de dois testes aplicados sucessivamente ao indivíduo são ambos positivos}\}$. Note-se que se T_i designar o acontecimento

$$T_i = \{i - \text{ésimo teste dá resultado positivo}\}$$

então segue-se que $D = T_1 \cap T_2$. Dos dados do problema, e uma vez que há independência condicional dos testes dado o estado do indivíduo, vem que

$$P(D|C) = P(T_1 \cap T_2|C) = P(T_1|C)P(T_2|C) = P(T|C)^2$$

e

$$P(D|\bar{C}) = P(T_1 \cap T_2|\bar{C}) = P(T_1|\bar{C})P(T_2|\bar{C}) = (P(T|\bar{C}))^2.$$

Aplicando um raciocínio idêntico ao da alínea anterior, vem que a probabilidade pedida é $P(C|D) = 0.6633$.

Note que no enunciado não é dito que os resultados dos testes são independentes pelo que

$$P(T_1 \cap T_2) \quad \textbf{não é necessariamente igual a} \quad P(T_1)P(T_2).$$

Exercício A3: Considere-se a seguinte notação para designar os eventos de interesse:

$$A = \{\text{aparelho com problemas de alinhamento}\}$$

$$E = \{\text{aparelho com problemas de enviesamento}\}$$

$$D = \{\text{aparelho com problemas de descentragem}\}$$

$$L = \{\text{ocorrência de erro de leitura}\}.$$

Note-se que $A = E \cup D$.

Do enunciado decorre que

$$P(E) = 0.1, \quad P(D) = 0.05, \quad P(E \cap D) = 0.02$$

$$P(L|\bar{E} \cap \bar{D}) = 0.001, \quad P(L|E \cap \bar{D}) = 0.01, \quad P(L|\bar{E} \cap D) = 0.02, \quad P(L|E \cap D) = 0.05.$$

- (a) Pretende-se calcular $P(E \cap \bar{D})$. Note-se que

$$P(E \cap \bar{D}) = P(E) - P(E \cap D) = 0.1 - 0.02 = 0.008$$

- (b) Nesta alínea o interesse é em determinar $P(A \cap L)$. Note-se que

$$A = E \cup D = (E \cap D) \cup (\bar{E} \cap D) \cup (E \cap \bar{D})$$

sendo que a decomposição de A que figura do lado direito da última igualdade é construída à custa de acontecimentos disjuntos. Em consequência:

$$\begin{aligned} P(A \cap L) &= P([(E \cap D) \cup (\bar{E} \cap D) \cup (E \cap \bar{D})] \cap L) = \\ &= P(E \cap D \cap L) + P(\bar{E} \cap D \cap L) + P(E \cap \bar{D} \cap L) \\ &= P(L|E \cap D)P(E \cap D) + P(L|\bar{E} \cap D)P(\bar{E} \cap D) + P(L|E \cap \bar{D})P(E \cap \bar{D}) \\ &= P(L|E \cap D)P(E \cap D) + P(L|\bar{E} \cap D)(P(D) - P(E \cap D)) + P(L|E \cap \bar{D})P(E \cap \bar{D}) \\ &= 0.05 \times 0.02 + 0.02 \times (0.05 - 0.02) + 0.01 \times 0.08 \\ &= 0.0024 \end{aligned}$$

(c) Nesta alínea o objectivo é calcular $P(A|L)$. Como

$$P(A|L) = \frac{P(L \cap A)}{P(L)} = \frac{P(L \cap A)}{P(L \cap A) + P(L \cap \bar{A})}$$

para resolver esta alínea basta determinar $P(L \cap \bar{A})$. Note-se que

$$P(L \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(L|\bar{A})$$

e, por sua vez

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P((\bar{E} \cap \bar{D})) = 1 - P(E \cup D) = \\ &= 1 - (P(E) + P(D) - P(E \cap D)) \\ &= 1 - (0.1 + 0.05 - 0.02) = 0.87 \end{aligned}$$

pelo que $P(L \cap \bar{A}) = 0.87 \times 0.001 = 0.00087$. Finalmente,

$$P(A|L) = \frac{0.0024}{0.0024 + 0.00087} = 0.7339.$$